

Cahier de vacances

MPSI $\Rightarrow$ MP

Réviser son année en 12 exercices

C'est les vacances... Enfin presque !

- Voici un devoir d'été qui vous propose, sans prétendre à l'exhaustivité, un tour d'horizon de votre année en mathématiques. Pour que ce travail soit utile, il est impératif de le faire seul accompagné **uniquement** de votre cours et de vos TD de l'année. Faites un **effort** de recherche sur toutes les questions, même si vous n'arrivez pas à les résoudre, l'aller-retour entre la partie du cours concernée et l'exercice sera profitable.
- Vous rédigez avec soins et concision vos solutions sur une copie **anonymisée** par un code personnel ; la copie est **à rendre le jour du stage de rentrée**, sera lue mais ne sera pas notée.
- La plupart des exercices sont des questions de cours ou d'application du cours sauf ceux signalés par un symbole [♠] qui nécessiteront peut-être une recherche plus approfondie. Les [♥] signalent des questions classiques donc incontournables.

Thème 1. Calculs algébriques

► Exercice 1.

- ☐ Connaître les sommes classiques. Calculer des sommes simples ; des sommes doubles.
- ☐ Établir des inégalités.

1. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^n k(n-k) \quad ; \quad B_n = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (k-\ell)^2 \quad ; \quad C_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \quad ; \quad D_n = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \frac{1}{2^{k+\ell}}.$$

2. Rappeler la définition du coefficient binomial puis énoncer la formule du binôme de Newton.

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier les trois identités suivantes :

$$[\heartsuit] \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad ; \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad ;$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2.$$

[♠] En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

3. Pour $x \in \mathbb{C}$, on pose $S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

(a) [♥] Montrer que : $\forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

(b) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

(c) [♠] En déduire que : $\forall x \in [0, 1], S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

► **Exercice 2.**

- ☐ Sommes géométriques.
- ☐ Calculs avec des nombres complexes.
- ☐ Racines de l'unité. Sous-groupe.

Soit un entier $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega_k = \omega^k$.
 - (a) Que vaut $|\omega_k|$? ω_k^n ? Montrer que $\{\omega_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Quel est son cardinal?
 - (b) [♥] Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$.
2. Montrer que $|\omega - 1| = 2 \sin \frac{\pi}{n}$.
3. [♠] On pose $W_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_{k+1} - \omega_k|$.
 - (a) Calculer W_n .
 - (b) Justifier que la suite $(W_n)_n$ converge et donner sa limite. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Thème 2. Algèbre linéaire

► **Exercice 3.**

- ☐ Montrer qu'une partie d'un ev est un ss-ev.
- ☐ Justifier que deux ss-ev sont supplémentaires.

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions définies et continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Soit les sous-ensembles :

$$P = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = \varphi(x) \right\} \quad \text{et} \quad I = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = -\varphi(x) \right\}$$

- (a) Établir que P est un sous-espace vectoriel de E . On admet que I est également un sous-espace vectoriel de E .
 - (b) [♥] Rappeler la définition d'espaces supplémentaires puis justifier que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires dans E .
2. On rappelle qu'une fonction φ de E est bornée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq M$$

[♥] Montrer que le sous-ensemble B de E des fonctions bornées est un sous-espace vectoriel de E .

3. Soit le sous-ensemble $V = \left\{ \varphi \in E \mid \varphi(0) = \varphi(1) \right\}$.

Justifier que V est un hyperplan de E et déterminer un sous-espace supplémentaire de V dans E .

4. [♠] Soit le sous-ensemble $F = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(2x) = \varphi(x) \right\}$.

Justifier que F est une droite vectorielle.

► **Exercice 4.**

- ☐ Application linéaire.
- ☐ Noyau et image.
- ☐ Projecteur.

1. **Un exemple.** Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont notés en colonne. On désigne par $\mathcal{C}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -x - y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Justifier que f est une application linéaire et donner la matrice de f de la base $\mathcal{C}_2$ vers la base $\mathcal{C}_3$.
Montrer que $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et déterminer $\text{Im } f$ (donner une base et la dimension).

L'application f est-elle surjective ? Injective ? Bijective ?

(b) On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\text{Ker } g$ (donner une base et la dimension). Écrire la formule du rang pour g et en déduire l'espace $\text{Im } g$. L'application g est-elle surjective ? Injective ? Bijective ?

(c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $g \circ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$. Que peut-on dire de l'application $g \circ f$?

(d) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f \circ g$ dans la base $\mathcal{C}_3$. En déduire que $f \circ g$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Préciser le noyau et l'image de $f \circ g$ (donner une base de ces espaces) ; que peut-on dire de ces deux sous-espaces ?

2. On considère E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

- (a) Dans cette question, on suppose que $g \circ f = \text{Id}_E$. Justifier que f est injective et g surjective. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur de F , que $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker } g$ et que $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im } f$.
- (b) [♠] Dans cette question, on suppose que f est injective, g surjective et $f \circ g$ est un projecteur. Justifier que $g \circ f = \text{Id}_E$.

► **Exercice 5.**

- ☐ Matrice d'un endomorphisme.
- ☐ Calculs de rang, d'inverse, de noyau, d'image.
- ☐ Formule de changement de base.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$ et on considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A ; on note enfin Id_E l'application identité de E .

- 1. [♥] Une étude de l'endomorphisme f .
 - (a) Déterminer le rang de f , son noyau et son image.

- (b) Déterminer le rang de $f - \text{Id}_E$, montrer que le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $f - \text{Id}_E$ et en déduire $\ker(f - \text{Id}_E)$.
- (c) Soient $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w .
- (d) Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est base de E .
- (e) Sans autre calcul, donner la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On notera D cette matrice.
2. [♥] Un calcul des puissances de A .
- (a) Déterminer P , la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ et exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n à l'aide de P , D , n et P^{-1} .
- (b) Donner explicitement la première colonne de A^n en fonction de n .
3. [♠] On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de A lorsqu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
Déterminer toutes les valeurs propres de A .

► Exercice 6.

- ☐ Calculs matriciels.
- ☐ Exercice de synthèse dans un espace de polynômes.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice carrée $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de taille n dont les coefficients sont donnés par :

$$d_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j ; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer les coefficients $(MD)_{k,\ell}$ et $(DM)_{k,\ell}$ des matrices produits MD et DM .
2. [♥] En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec D .

On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Nous considérons l'ensemble $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$ ainsi que l'application ψ définie de $\mathbb{R}[X]$ vers lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \psi(P) = XP'.$$

3. Que vaut $\dim \mathbb{R}_n[X]$? Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Justifier que la famille $\mathcal{B}_n = X, X^2, \dots, X^n$ est une base de E_n . Quelle est la dimension de E_n ?
5. Montrer que ψ est linéaire puis qu'elle induit un endomorphisme ψ_n de l'espace E_n . Que vaut la matrice de ψ_n dans la base $\mathcal{B}_n$? En déduire $\det \psi_n$.
6. [♠] On note $\mathcal{C}(\psi_n)$ l'ensemble des endomorphismes de E_n qui commutent avec ψ_n .
 - (a) Justifier que $\mathcal{C}(\psi_n)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}(E_n)$ des endomorphismes de E_n .
 - (b) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(\psi_n)$.

Thème 3. Analyse réelle

► Exercice 7.

- ☐ Calculs de limites ; croissances comparées usuelles.
- ☐ Développements limités ; équivalents simples (à réviser!).

Calculer les limites suivantes :

1. en utilisant des comparaisons ou croissances comparées usuelles :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

2. En utilisant des équivalents ou développements limités :

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{x} \quad ; \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad (f) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cos(\theta) - \sin(\theta)}{\theta^3}.$$

3. [♠] Comme vous pourrez :

$$(g) \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos(t^2) \tan\left(\frac{1}{t}\right) \quad ; \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - \cos(x)} \ln(x) \quad ; \quad (i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

► Exercice 8.

- ☐ Étude de fonction.
- ☐ Théorème de la bijection monotone ; dérivabilité d'une réciproque.
- ☐ Suite récurrente. Série.

La fonction tangente hyperbolique, notée th , est définie par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

1. [♥] Étude de la fonction th .

- (a) Justifier que th est définie sur $\mathbb{R}$ puis étudier sa parité.
- (b) Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x).$$

- (c) Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de th .
- (d) Calculer les deux limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{th}(x)$.
- (e) Donner le tableau de variation de la fonction et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct en précisant les asymptotes.

2. [♥] Étude de la réciproque de th .

- (a) Justifier que la fonction th induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser. On note argth la réciproque ainsi définie ; donner le tableau de variation de la fonction argth .
- (b) Étudier la dérivabilité de la fonction argth et justifier que, lorsque cela a un sens, nous avons :

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

- (c) En déduire que pour tout $x \in J$, $\text{argth}(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$.

3. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{th}(u_n).$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ est strictement décroissante. En déduire que $(u_n)_n$ converge puis déterminer sa limite.

(b) [♠] Justifier que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{3}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

► **Exercice 9.**

☐ Définition d'une limite.

☐ Étude d'une suite récurrente.

1. Dans cette question on considère une suite $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$.

(a) Écrire la définition **avec quantificateurs** de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$,

$$|v_n - v_{n_0}| < (n - n_0) \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire que pour tout $n > n_0$,

$$\frac{|v_n|}{n} < \left(\frac{n - n_0}{n} \right) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|v_{n_0}|}{n}.$$

(d) Justifier qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\frac{|v_{n_0}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

(e) Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 0$.

2. Soit une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$.

En considérant la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - n\ell$ montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

3. [♠] Dans cette question on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}_+^*.$$

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(b) Calculer u_{n+1}^3 en fonction de u_n puis en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^3 - u_n^3) = 3$$

(c) En déduire l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}.$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

► **Exercice 10.**

- Calculs d'intégrales.

Justifier les égalités ci-dessous.

Avant de commencer tout calcul, on commencera par vérifier que les fonctions intégrées sont continues ou prolongeables par continuité sur les segments considérés.

$$(a) \int_1^e t \ln(t) dt = \frac{e^2 + 1}{4} \quad ; \quad (b) \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{32} \quad ; \quad (c) \spadesuit \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) dt = \ln \frac{\pi}{4}.$$

Thème 4. Probabilités► **Exercice 11.**

- Variables aléatoires.
□ Lois de probabilités usuelles (Bernoulli, binomiale).

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un réel $p \in]0, 1[$. On considère une famille de variables aléatoires *mutuellement indépendantes* $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ définies sur Ω et à valeurs dans $\{0, 1\}$ qui suivent toute une même loi de Bernoulli de paramètre p .

1. Expliciter la loi de probabilité de X_1 .

2. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires : $S = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T = \prod_{k=1}^n X_k$.

► **Exercice 12.**

- Algorithmique.
□ Arithmétique.
□ Loi de probabilité.

Étant donné a et b deux entiers non nuls, on note $a|b$ la relation « a divise b » et $a \wedge b$ le PGCD de a et b .

Étant donné un entier $n \geq 2$, on note $\mathcal{A}_n = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k \wedge n = 1\}$. C'est l'ensemble des entiers k compris entre 1 et n tels que k et n sont premiers entre eux.

Par exemple : $\mathcal{A}_6 = \{1, 5\}$, $\mathcal{A}_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. [♥] Écrire une fonction Python `pgcd(a,b)` qui calcule $a \wedge b$. Tester la fonction en machine.
2. Écrire une seconde fonction Python `premiers(n)` qui retourne l'entier $\text{card } \mathcal{A}_n$. Tester la fonction en machine.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

3. [♥] Donner la loi de probabilité de U . Calculer l'espérance et la variance de U .
4. [♠]

(a) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que d divise n . Montrer que $\mathbf{P}(d|U) = \frac{1}{d}$.

(b) Soit $p_1 < \dots < p_r$ tous les diviseurs premiers de l'entier n .
Montrer que les événements $(p_1|U), \dots, (p_r|U)$ sont indépendants.

(c) En déduire que

$$\mathbf{P}(U \wedge n = 1) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

5. Démontrer que $\text{card } \mathcal{A}_n = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

♡ Bonnes vacances ♠

